

# МЕЖРЕГИОНАЛЬНАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ УЧИТЕЛЕЙ МАТЕМАТИКИ



**«Повышение качества основного общего и  
дополнительного математического образования в  
рамках Концепции развития математического  
образования в Российской Федерации»**

**МГУ имени М.В. Ломоносова**

**26 ноября 2017**

## **Рекомендации по подготовке к выполнению финансово-экономических задач ЕГЭ повышенного уровня**



**Прокофьев Александр Александрович,**  
Зав.каф. ВМ-1, НИУ МИЭТ,  
учитель математики ГБОУ г. Москвы «Школа №1298»

# Критерии проверки задания №17

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели и получен результат: — неверный ответ из-за вычислительной ошибки; — верный ответ, но решение недостаточно обосновано	2
Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели, при этом решение может быть не завершено	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0

# Задание 17 на ЕГЭ по математике профильного уровня 2017 года

**Задание 17** в основную волну ЕГЭ (профильный уровень) 2017 года представляло задачу на кредиты.

Процент решаемости оказался в пределах статистики для решения подобных заданий (1 балл получило 5,35% от общего числа участников экзамена, 2 балла – 5,35%, 3 балла – 17,16%).

## **Основные ошибки, допущенные участниками экзамена:**

- неверное составление модели;
- вычислительные (арифметические);
- прекращение решения на промежуточном шаге, то есть без доведения ответа до числового значения;
- решение методом перебора без обоснования единственности;
- использование в решении без вывода формул для задач о кредитовании, отсутствующих в учебниках (решение имеет вид «формула – ответ»), что можно трактовать как отсутствие построения модели задачи.

# Распределение удовлетворенных апелляций по заданиям с развернутым ответом



Задание №17 (имеет наибольшее число выходов на апелляцию!).

# Различные типы задания в вариантах ЕГЭ по математике (профильный уровень) в 2017 году

## **Задачи на кредиты и оптимизацию производства товаров или услуг**



# Задачи на кредиты

Многие участники экзамена действовали по аналогии с решениями подобных задач, представленными на различных сайтах или в пособиях для подготовки к ЕГЭ.

Можно выделить две ситуации.

1. Решение основано на применении окончательной формулы без ее вывода. В этом случае можно утверждать об отсутствии построения модели задачи. К тому же использование без вывода формулы, которой нет в официальных учебниках в соответствии со «**Спецификацией контрольных измерительных материалов для проведения в 2017 году единого государственного экзамена**» раздел 3, пункт 2, считается недопустимым.
2. Решение основано на применении метода перебора без достаточных обоснований единственности решения задачи. В этом случае отсутствует построение модели задачи.

## Задание №17. Задачи на вклады (схема 1 – платеж равными взносами)

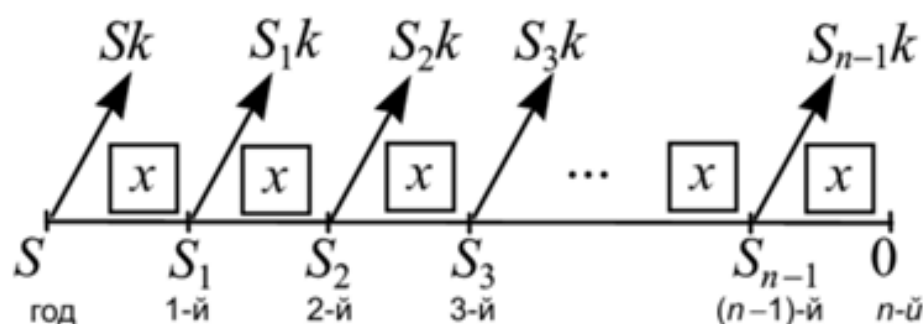
**Схема 1.** Пусть в банке планируется взять кредит в банке на некоторую сумму  $S$ . Условия его возврата таковы:

- в начале года долг увеличивается на  $r$  % по сравнению с концом прошлого года;
- до конца каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга.

Найти общую сумму платежей, внесенных клиентом, после погашения кредита, если **все ежегодные платежи равны между собой**.

*Решение.*

Пусть  $x$  – вносимый ежегодный платеж,  $S_m$  – долг клиента банку на конец  $m$ -го года. Тогда  $S_m \cdot \left(1 + \frac{r}{100}\right)$  – его долг банку в начале  $(m+1)$ -го года или  $S_m \cdot k$ , где  $k = 1 + \frac{r}{100}$ .



В соответствии с нарисованной схемой получаем цепочку равенств:

$$S_1 = S \cdot k - x,$$

$$S_2 = S_1 \cdot k - x = (S \cdot k - x) \cdot k - x = S \cdot k^2 - x \cdot k - x,$$

$$S_3 = S_2 \cdot k - x = (S \cdot k^2 - x \cdot k - x) \cdot k - x = S \cdot k^3 - x \cdot k^2 - x \cdot k - x,$$

.....

$$S_n = S_{n-1} \cdot k - x = S \cdot k^n - x \cdot k^{n-1} - x \cdot k^{n-2} - \dots - x \cdot k - x =$$

$$= S \cdot k^n - x( \underbrace{k^{n-1} + k^{n-2} + \dots + k + 1}_{\text{сумма геометрической прогрессии}} ) = 0.$$

*сумма геометрической прогрессии*

Получаем уравнение  $S \cdot k^n - x \cdot \frac{k^n - 1}{k - 1} = 0.$  Отсюда  $x = S \cdot \frac{k^n(k - 1)}{k^n - 1}$

и общая сумма выплат равна  $nx = S \cdot \frac{k^n(k - 1)}{k^n - 1}.$







## Задание №17. Задачи на вклады (схема 2 – уменьшение долга каждый год на одну и ту же величину)

**Схема 2.** Пусть в банке планируется взять кредит в банке на некоторую сумму  $S$ . Условия его возврата таковы:

- в начале года долг увеличивается на  $r\%$  по сравнению с концом прошлого года;
- до конца каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга;
- после внесения платежа каждый год **долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на конец предыдущего года.**

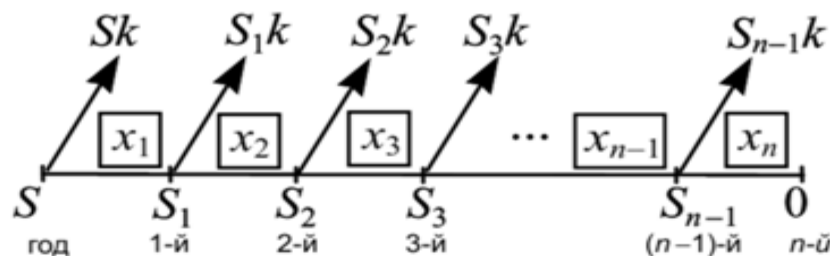
Найти общую сумму внесенных платежей после погашения кредита.

*Решение.*

Пусть  $x_m$  и  $S_m$  – соответственно вносимый платеж и долг клиента банку на конец  $m$ -го года. Тогда  $S_m \cdot \left(1 + \frac{r}{100}\right)$  – его долг банку в начале  $(m+1)$ -го года или  $S_m \cdot k$ , где  $k = 1 + \frac{r}{100}$ . В соответствии с условием задачи

долг ежегодно уменьшается на величину равную  $\frac{S}{n}$ , тогда  $S_m = S - S \cdot \frac{m}{n}$ .

В соответствии с условием задачи и схемой получаем цепочку равенств:



$S_1 = S - \frac{S}{n} = S \cdot \frac{n-1}{n},$	$x_1 = S \cdot k - S_1 = S \cdot k - S \cdot \frac{n-1}{n},$
$S_2 = S - 2 \cdot \frac{S}{n} = S \cdot \frac{n-2}{n},$	$x_2 = S_1 \cdot k - S_2 = S \cdot \frac{n-1}{n} \cdot k - S \cdot \frac{n-2}{n},$
$S_3 = S - 3 \cdot \frac{S}{n} = S \cdot \frac{n-3}{n},$	$x_3 = S_2 \cdot k - S_3 = S \cdot \frac{n-2}{n} \cdot k - S \cdot \frac{n-3}{n},$
.....	
$S_m = S - (n-1) \cdot \frac{S}{n} = \frac{S}{n},$	$x_n = S_{n-1} \cdot k = \frac{S}{n} \cdot k.$



$$\begin{aligned}
 &\text{Суммируя все выплаты, получаем } x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n = \\
 &= S \cdot k - \underbrace{S \cdot \frac{n-1}{n}} + \underbrace{S \cdot \frac{n-1}{n} \cdot k - S \cdot \frac{n-2}{n}} + \underbrace{S \cdot \frac{n-2}{n} \cdot k - S \cdot \frac{n-3}{n}} + \dots + \frac{S}{n} \cdot k = \\
 &= S \cdot k + S \cdot (k-1) \underbrace{\left( \frac{n-1}{n} + \frac{n-2}{n} + \dots + \frac{1}{n} \right)}_{\text{сумма арифметической прогрессии}}.
 \end{aligned}$$

Получаем формулу  $x_1 + x_2 + \dots + x_n = S \cdot k + S \cdot (k-1) \cdot \frac{n-1}{2}.$



## Задание №17

### (вклад выплачивается равными платежами)

17

**Пример 1.** В июле 2020 года планируется взять кредит в банке на некоторую сумму. Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг увеличивается на 30% по сравнению с концом прошлого года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга.

Сколько рублей было взято в банке, если известно, что кредит был полностью погашен тремя равными платежами (то есть за 3 года) и сумма платежей превосходит взятую в банке сумму на 156060 рублей?

**Решение.**

Пусть  $S$  руб. – сумма кредита,  $x$  руб. – размер ежегодного платежа. Тогда общая сумма выплат после полного погашения кредита через  $n = 3$  года равна  $3x = S + 156060$  руб. Так как  $r = 30$ , то  $k = 1 + \frac{r}{100} = 1,3$ . Выводим

3 года – 3 строчки для вывода

формулу  $3x = 3 \cdot S \cdot \frac{k^3(k-1)}{k^3-1}$ . Из уравнения  $S + 156060 = 3 \cdot S \cdot \frac{1,3^3 \cdot 0,3}{1,3^3 - 1}$

получаем  $S \cdot \frac{7803}{11970} = 156060$ . Отсюда  $S = 239400$  руб.

**Ответ.** 239400 руб.

## Задание №17 (уменьшение долга каждый год на одну и ту же величину)

17

**Пример 2.** В июле планируется взять в кредит в банке на сумму 5 млн рублей на некоторый срок (целое число лет). Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг возрастает на 20% по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;
- в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на июль предыдущего года.

На сколько лет планируется взять кредит, если известно, что общая сумма выплат после его полного погашения составит 7,5 млн рублей.

**Решение.**

Пусть  $n$  – количество лет, на которое берется кредит  $S = 5$  млн. руб.,  $x_1, x_2, \dots, x_n$  – величины в рублях платежей в первый, второй, ...,  $n$ -й годы. Общая сумма выплат после полного погашения кредита равна  $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 7,5$  млн. руб. Так как  $r = 20$ , то  $k = 1,2$ . Выводим формулу

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = S \cdot k + S \cdot (k - 1) \cdot \frac{n - 1}{2}.$$

Из уравнения  $7,5 = 5 \cdot 1,2 + 5 \cdot 0,2 \cdot \frac{n - 1}{2}$  получаем  $n = 4$ .

**Ответ. 4.**



# Задание 17

## (долг в соответствии с данной таблицей)

ЕГЭ 2016

17

15-го января планируется взять кредит в банке на шесть месяцев в размере 1 млн рублей. Условия его возврата таковы:

- 1-го числа каждого месяца долг увеличивается на  $r$  процентов по сравнению с концом предыдущего месяца, где  $r$  — **целое** число;
- со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
- 15-го числа каждого месяца долг должен составлять некоторую сумму в соответствии со следующей таблицей.

Дата	15.01	15.02	15.03	15.04	15.05	15.06	15.07
Долг (в млн рублей)	1	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5	0

Найдите наименьшее значение  $r$ , при котором общая сумма выплат будет больше 1,2 млн рублей.

Процент решаемости 14%



# Решение

По условию, долг перед банком (в млн рублей) на 15-е число каждого месяца должен уменьшаться до нуля следующим образом:

$$1; 0,9; 0,8; 0,7; 0,6; 0,5; 0.$$

Пусть  $k = 1 + \frac{r}{100}$ , тогда долг на 1-е число каждого месяца равен:

$$k; 0,9k; 0,8k; 0,7k; 0,6k; 0,5k.$$

Следовательно, выплаты со 2-го по 14-е число каждого месяца составляют:

$$k - 0,9; 0,9k - 0,8; 0,8k - 0,7; 0,7k - 0,6; 0,6k - 0,5; 0,5k.$$

Общая сумма выплат составляет:

$$\begin{aligned} & k(1 + 0,9 + 0,8 + 0,7 + 0,6 + 0,5) - (0,9 + 0,8 + 0,7 + 0,6 + 0,5) = \\ & = (k - 1)(1 + 0,9 + 0,8 + 0,7 + 0,6 + 0,5) + 1 = 4,5(k - 1) + 1. \end{aligned}$$

По условию, общая сумма выплат будет больше 1,2 млн рублей, значит,

$$4,5(k - 1) + 1 > 1,2; 4,5 \cdot \frac{r}{100} + 1 > 1,2; r > 4\frac{4}{9}.$$

Ответ: 5.

**ЕГЭ  
2015**

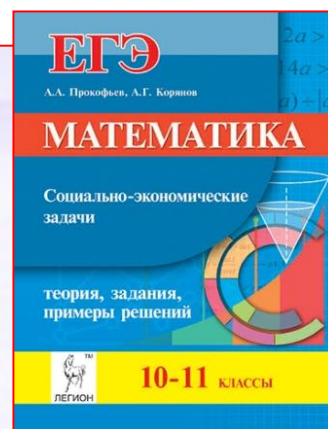
**Пример 64 (ЕГЭ, 2015).** В июле планируется взять кредит в банке на сумму 20 млн рублей на некоторый срок (целое число лет). Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг возрастает на 30% по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;
- в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года.

На сколько лет был взят кредит, если известно, что общая сумма выплат после его погашения равнялась 47 млн рублей?

**Решение.** Пусть сумма кредита равна  $An = 20$ , где  $n$  — искомое количество лет. Составим таблицу кредитной истории

Годы	Долг в июле (млн руб.) — без учёта процентной ставки	Долг в январе (млн руб.) — без учёта погашения части кредита	Выплачено с февраля по июнь (млн руб.)	Долг в июле (млн руб.) с учётом погашения части кредита
1	$An$	$1,3An$	$1,3An - A(n-1)$	$A(n-1)$
2	$A(n-1)$	$1,3A(n-1)$	$1,3A(n-1) - A(n-2)$	$A(n-2)$
3	$A(n-2)$	$1,3A(n-2)$	$1,3A(n-2) - A(n-3)$	$A(n-3)$
...	...	...	...	...
9	$A$	$1,3A$	$1,3A$	0



$$1,3A \cdot \frac{1+n}{2} \cdot n - A \cdot \frac{1+(n-1)}{2} \cdot (n-1) = 47;$$

**Ответ: 8 лет.**

# Задание №17 (задача на оптимизацию)

17

**Пример 3.** Владимир является владельцем двух заводов в разных городах. На заводах производятся абсолютно одинаковые товары при использовании одинаковых технологий. Если рабочие на одном из заводов трудятся суммарно  $t^2$  часов в неделю, то за эту неделю они производят  $t$  единиц товара.

За каждый час работы на заводе, расположенном в первом городе, Владимир платит рабочему 500 рублей, а на заводе, расположенном во втором городе – 300 рублей.

Владимир готов выделять 1200000 рублей на оплату труда рабочих. Какое наибольшее количество единиц товара можно произвести за неделю на этих двух заводах?

## Задание №17 (задача на оптимизацию)

*Решение. 1-й способ* (с использованием производной).

Допустим, что на заводе в первом городе рабочие трудятся  $x^2$  часов, а на заводе во втором городе  $y^2$  часов. Тогда в неделю будет произведено  $x + y$  единиц товара при затратах на оплату труда  $500x^2 + 300y^2$  рублей.

Найдем наибольшее значение выражения  $Q = x + y$  при условии  $500x^2 + 300y^2 = 1200000$ . Выразив отсюда  $y = \sqrt{4000 - \frac{5}{3}x^2}$ , получим

$$Q(x) = x + \sqrt{4000 - \frac{5}{3}x^2}.$$

Нужно найти наибольшее значение функции  $Q(x)$  на отрезке  $[0; 20\sqrt{6}]$ .

$$Q'(x) = 1 - \frac{5x}{3 \cdot \sqrt{4000 - \frac{5}{3}x^2}} \text{ при } x \neq 20\sqrt{6}.$$



# Задание №17 (задача на оптимизацию)

## *Продолжение решения*

Из уравнения  $Q'(x) = 0$  получаем

$$3 \cdot \sqrt{4000 - \frac{5}{3}x^2} = 5x,$$

$$x^2 = 900,$$

$$x = 30.$$

Точки  $x = 30$  – единственная критическая точка функции на отрезке  $[0; 20\sqrt{6}]$ . Сравнивая значения  $Q(30) = 80$ ,  $Q(20\sqrt{6}) = 20\sqrt{6}$ ,  $Q(0) = 20\sqrt{10}$ , получаем, что наибольшее значение функции  $Q(x)$  равно 80, а значит и наибольшее количество единиц товара равно 80.

*Ответ. 80.*



# Задание №17 (задача на оптимизацию)

*Решение. 2-й способ (введение параметра).*

Пусть на заводе в первом городе рабочие трудятся  $x^2$  часов, а на заводе во втором городе  $y^2$  часов. Тогда в неделю будет произведено  $x + y$  единиц товара при затратах на оплату труда  $500x^2 + 300y^2$  рублей.

Требуется найти наибольшее значение параметра  $a$ , где  $a = x + y$ , при выполнении условий  $500x^2 + 300y^2 = 1200000$  (\*),  $x \geq 0$  и  $y \geq 0$ .

Выразив  $y = a - x$ , и, подставив в (\*)  $5x^2 + 3(a - x)^2 = 12000$ , получим квадратное уравнение

$$8x^2 - 6ax + 3a^2 - 12000 = 0.$$

Задача сводится к нахождению наибольшего неотрицательного значения параметра, при котором это уравнение имеет решение  $x \geq 0$  и, кроме того, получается  $y \geq 0$ . Квадратное уравнение имеет решение, если

$$D = 36a^2 - 4 \cdot 8 \cdot (3a^2 - 12000) = -64a^2 + 32 \cdot 12000 \geq 0 \Leftrightarrow -80 \leq a \leq 80.$$

При  $a = 80$  получаем  $x = 30$  и  $y = 50$ . Значит, наибольшее количество единиц товара равно 80.

Ответ. 80.

# Задание 17 на ЕГЭ 2015 года

**Пример 38.** Первичная информация разделяется по серверам №1 и №2 и обрабатывается на них. С сервера №1 при объёме  $t^2$  Гб входящей в него информации выходит  $20t$ , а с сервера №2 при объёме  $t^2$  Гб входящей в него информации выходит  $21t$  Гб обработанной информации;  $25 \leq t \leq 55$ . Каков наибольший общий объём выходящей информации при общем объёме входящей информации в 3364 Гб?

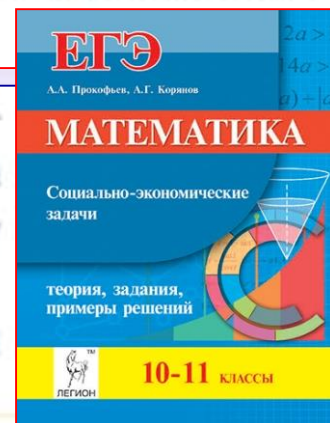
**Решение.** Пусть на сервере №1 обрабатывается  $x^2$ , а на сервере №2 обрабатывается  $y^2$  Гб из всей первичной информации. Тогда  $x^2 + y^2 = 3364$ , а обработано будет  $20x + 21y$  Гб информации. Выразим  $y$  через  $x$ :  $y = \sqrt{3364 - x^2}$ .

Требуется найти наибольшее значение функции  $f(x) = 20x + 21\sqrt{3364 - x^2}$ .

$$f'(x) = 20 - \frac{21x}{\sqrt{3364 - x^2}}, \quad f'(x) = 0, 400 = \frac{441x^2}{3364 - x^2}, \quad x^2 = \frac{400 \cdot 3364}{841} = 1600, x = 40.$$

Поэтому  $x = 40$  единственная критическая точка и  $y = \sqrt{3364 - 1600} = 42$ . Условия  $25 \leq x \leq 55$ ,  $25 \leq y \leq 55$  выполнены. Если  $x < 40$ , то  $x^2 < 1600$ ,  $400 > \frac{441x^2}{3364 - x^2}$  и  $f'(x) > 0$ . Если  $x > 40$ , то  $f'(x) < 0$ . Поэтому  $x = 40$  есть точка максимума. Значит,  $f_{\text{наиб.}} = f(40) = 20 \cdot 40 + 21 \cdot 42 = 1682$ .

**Ответ: 1682 Гб.**



# Задание №17 (задача на оптимизацию)

17

**Пример 4.** Пенсионный фонд владеет ценными бумагами, которые стоят  $t^2$  тыс. рублей в конце года  $t$  ( $t=1; 2; \dots$ ). В конце любого года пенсионный фонд может продать ценные бумаги и положить деньги на счет в банке, при этом в конце каждого года сумма на счете будет увеличиваться в  $1 + r$  раз. Пенсионный фонд хочет продать ценные бумаги в конце такого года, чтобы в конце двадцать пятого года сумма на его счете была наибольшей. Расчеты показали, что для этого ценные бумаги нужно продавать строго в конце двадцать первого года.

При каких положительных значениях  $r$  это возможно?



## Задание №17 (задача на оптимизацию)

Если пенсионный фонд продаст ценные бумаги в конце года  $t$ , то в конце двадцать пятого года на его счете будет  $f(t) = t^2(1+r)^{25-t}$  тыс. рублей.

*Комментарий.* Большинство участников экзамена решало данную задачу следующим образом. Вводили последовательность  $\{f(t)\}$ , где  $f(t) = t^2(1+r)^{25-t}$  тыс. рублей сумма на счете пенсионного фонда в конце двадцать пятого года при условии, что он продаст ценные бумаги в конце года  $t$ . Далее решали систему 
$$\begin{cases} f(21) > f(20), \\ f(21) > f(22). \end{cases}$$

Однако данное условие является необходимым, но не достаточным условием того, что последовательность принимает наибольшее значение при  $t = 21$ . Такое решение оценивается в 0 баллов.

$$\text{Ответ. } \frac{43}{441} < r < \frac{41}{400}.$$



# К вопросу обоснования достаточности сравнения с двумя соседними годами

Если выгоднее всего продажа бумаг в конце года  $t$ , то она выгоднее, чем продажа в конце годов  $(t+1)$  и  $(t-1)$ . Покажем, что система

$$\begin{cases} f(t) > f(t+1), \\ f(t) > f(t-1) \end{cases}$$

не может иметь более одного натурального решения. Обозначив  $k = 1 + r > 1$ , получим

$$\begin{cases} t^2 k > (t+1)^2, \\ t^2 > (t-1)^2 k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + \frac{1}{t} < \sqrt{k}, \\ 1 - \frac{1}{t} < \frac{1}{\sqrt{k}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t > \frac{1}{\sqrt{k} - 1}, \\ t < \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{k} - 1}. \end{cases}$$

Так как  $\frac{\sqrt{k}}{\sqrt{k} - 1} - \frac{1}{\sqrt{k} - 1} = 1$ , то натуральных значений  $t$ , удовлетворяющих

системе, не более одного. Отсюда можно сделать вывод о том, что если  $t = 21$  удовлетворяет системе, то ей не удовлетворяет никакое другое натуральное  $t = 2, 3, \dots, 20, 22, \dots, 24$ . То есть продажа в эти годы не может быть самой выгодной. Однако при этом может оказаться, что продажа в 1-ый ~~или 25-ый~~ годы выгоднее. Необходимо сравнить  $f(21)$  с  $f(1)$  ~~и  $f(25)$~~ .



## Задание №17 (задача на оптимизацию)

**Задача.** Пенсионный фонд владеет ценными бумагами, которые стоят  $t^2 + 4$  тыс. рублей в конце года  $t$  ( $t = 1; 2; \dots$ ). В конце любого года пенсионный фонд может продать ценные бумаги и положить деньги на счет в банке, при этом в конце каждого года сумма на счете будет увеличиваться в  $1+r$  раз. Пенсионный фонд хочет продать ценные бумаги в конце такого года, чтобы в конце тридцатого года сумма на его счете была наибольшей. Расчеты показали, что для этого ценные бумаги нужно продавать строго в конце третьего года. При каких положительных значениях  $r$  это возможно?

$$\begin{cases} f(3) > f(4), \\ f(3) > f(2), \\ f(3) > f(1) \end{cases}$$

$$\text{Ответ. } \frac{7}{13} < r < \sqrt{\frac{13}{5}} - 1.$$

# Задание №17 (задача на оптимизацию)

*Решение. 1-й способ (авторский).*

Если пенсионный фонд продаст ценные бумаги в конце года  $t$ , то в конце двадцать пятого года на его счете будет  $S_t = t^2(1+r)^{25-t}$  тыс. рублей. Сравним числа  $S_t$  и  $S_{t+1}$ :

$$S_{t+1} - S_t = (t+1)^2(1+r)^{24-t} - t^2(1+r)^{25-t} = (1+r)^{24-t}(-rt^2 + 2t + 1).$$

Рассмотрим непрерывную функцию  $f(x) = -rx^2 + 2x + 1$ . Если  $f(t) > 0$ , то  $S_{t+1} - S_t > 0$ , и если  $f(t) < 0$ , то  $S_{t+1} - S_t < 0$ .

График функции  $f(x)$  – парабола, ветви которой направлены вниз. Так как  $f(0) > 0$ , то если для некоторого натурального числа  $t$  выполнено условие  $f(t) < 0$ , то для любого  $n > t$  выполнено условие  $f(n) < 0$ . Следовательно, ценные бумаги нужно продавать строго в конце двадцать первого года при выполнении условий  $f(20) > 0$  и  $f(21) < 0$ , то есть

$$\begin{cases} -20^2 r + 2 \cdot 20 + 1 > 0, \\ -21^2 r + 2 \cdot 21 + 1 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 400r < 41, \\ 441r > 43 \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{\frac{43}{441} < r < \frac{41}{400}}.$$

## Задание №17 (задача на оптимизацию)

*Решение. 2-й способ (с использованием производной).*

Если пенсионный фонд продаст ценные бумаги в конце года  $t$ , то в конце двадцать пятого года на его счете будет  $S(t) = t^2(1+r)^{25-t}$  тыс. рублей. Рассмотрим функцию  $S(x) = x^2(1+r)^{25-x}$ , зависящую от действительной переменной  $x$  на отрезке  $[0; 25]$ . Числа  $S(t)$  последовательности  $\{S(t)\}$ ,  $1 \leq t \leq 25$  совпадают со значениями функции  $S(x)$  при  $x = t$ .

Функция  $S(x)$  непрерывна на  $[0; 25]$  и  $S(0) = 0$ ,  $S(25) = 625$ .

$$\begin{aligned} S'(x) &= \left( x^2 (1+r)^{25-x} \right)' = 2x(1+r)^{25-x} - x^2 (1+r)^{25-x} \ln(1+r) = \\ &= x(1+r)^{25-x} (2 - x \ln(1+r)). \end{aligned}$$

# Задание №17 (задача на оптимизацию)

*Решение. 2-й способ (с использованием производной).*

$S'(x) = 0$  при  $x = 0$  или  $x = \frac{2}{\ln(1+r)}$ . Причем  $S'(x) \leq 0$  при  $0 \leq x \leq \frac{2}{\ln(1+r)}$  и  $S'(x) > 0$  при  $x > \frac{2}{\ln(1+r)}$ , то есть  $x_{\max} = \frac{2}{\ln(1+r)}$  (единственный!).

В условии сказано, что ценные бумаги выгоднее продать в конце 21-го года. Значит, максимум функции  $S(x)$  находится на интервале  $(20; 22)$  и для последовательности  $\{S(t)\}$  должны выполняться условия  $\begin{cases} S(21) > S(20), \\ S(21) > S(22). \end{cases}$

Отсюда

$$\begin{cases} 21^2(1+r)^{25-21} > 20^2(1+r)^{25-20}, \\ 21^2(1+r)^{25-21} > 22^2(1+r)^{25-22} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 21^2 > 20^2(1+r), \\ 21^2 > 22^2(1+r) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r < \frac{41}{400}, \\ r > \frac{43}{441}. \end{cases}$$

**Ответ.**  $\frac{43}{441} < r < \frac{41}{400}$ .



# Содержание пособия по заданию №17 авторов Корянов А.Г., Прокофьев А.А.

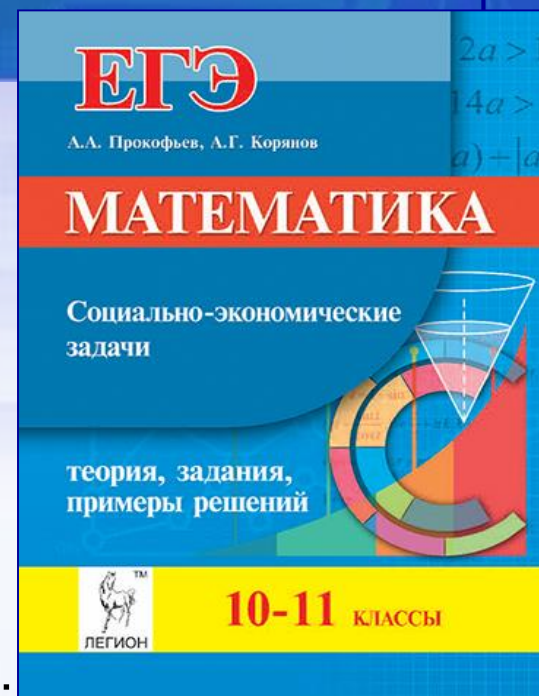
## Оглавление

### § 1. Экономико-математические модели . . . . . 5

- (1) Простейшие задачи на проценты;
- (2) пропорциональное деление величины;
- (3) процентное изменение величины;
- (4) проценты и соотношения между величинами;
- (5) формула простых процентов;
- (6) формула сложных процентов;
- (7) обобщённая формула сложных процентов;
- (8) задачи с целочисленными переменными;
- (9) задачи на оптимизацию; (10) средние величины;
- (11) числовые характеристики дискретной случайной величины.

### § 2. Сюжетные задачи . . . . . 64

- (1) Задачи о вкладах; (2) задачи о кредитах;
- (3) торгово-денежные отношения; (4) курсы валют;
- (5) инфляционные процессы;
- (6) выборы и социологические опросы.





# Учебники

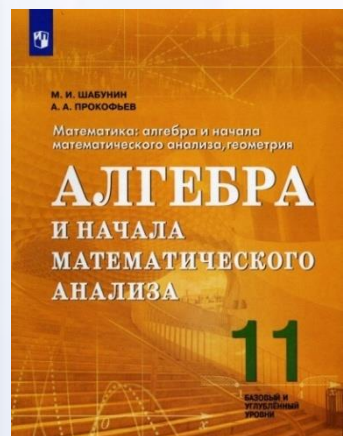
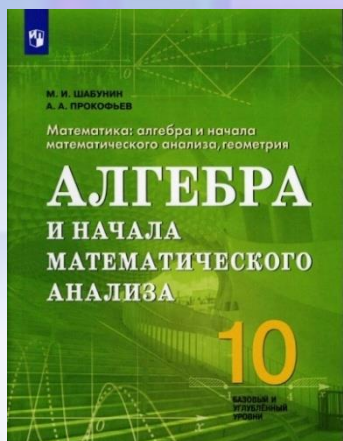
**Учебники, изданные  
издательством  
«Просвещение», для классов  
инженерного профиля**

# Алгебра и начала математического анализа. 10 и 11 классы

## Базовый и углублённый уровни

Авторы: М.И. Шабунин, А. А. Прокофьев

- **Прошли экспертизу для включения** в Федеральный перечень учебной литературы, рекомендованной к использованию в образовательных организациях;
- **Рассчитаны:** - на базовом уровне 2,5 часов в неделю ( 85 часов в год) ;  
- на углублённом уровне 4 или 5 часов в неделю (136 или 180 часов в год);
- **позволяют обеспечить** учащимся достижение планируемых результатов освоения программы СОО по математике на базовом уровне в блоках «Ученик научится» и «Ученик получит возможность научиться» и программы углублённого изучения предмета в блоке «Ученик научится»;
- **имеют отличительной особенностью** прикладную направленность, большое количество разобранных примеров, знакомящих учащихся с различными методами решений и доказательств и позволяющих организовать процесс подготовки старшеклассников к поступлению в высшие технические учебные заведения с повышенными требованиями к математической подготовке поступающих (МФТИ, МВТУ, МИЭТ и др.).
- **рекомендуются к использованию в линиях:**
  - по алгебре (7-9 угл. и общеобр.) Ю.Н. Макарычева и др.
  - по алгебре (7-9) Колягина Ю.М. и др.,
  - по алгебре (7-9) Дорофеева Г.В. и др.
  - по алгебре (7-9) Никольского С.М. и др.



# Документы о праве использования учебных пособий издательства «Просвещение» в обучении

■ [Приказ Министерства образования и науки РФ от 9 июня 2016 г. №699](#) о Перечне организаций, осуществляющих выпуск **учебных пособий**, которые допускаются к использованию при реализации образовательных программ.

■ [Приказ Министерства образования и науки РФ от 18 июля 2016 г. №870](#) об утверждении порядка формирования Федерального перечня учебников, рекомендуемых к использованию.

■ Закон об образовании от 21 декабря 2012 г. №273 – ФЗ статья 18. Печатные и электронные образовательные ресурсы. В нем записано:

**Организации, осуществляющие образовательную деятельность по имеющим государственную аккредитацию образовательным программам ... выбирают:**

- 1) учебники из числа входящих в федеральный перечень учебников...;
- 2) **учебные пособия, выпущенные организациями, входящими в перечень организаций, осуществляющих выпуск учебных пособий, которые допускаются к использованию при реализации имеющих государственную аккредитацию образовательных программ начального общего, основного общего, среднего общего образования.**



# Спасибо за внимание!

А.А. Прокофьев

Тел.: (499) 729-73-43

E-mail: aaprokof@yandex.ru

